

1. cvičení - teorie

Číselné obory

$\mathbb{N}$ - přirozená čísla

$\mathbb{Q}$ - racionální čísla

$\mathbb{Z}$ - celá čísla

$\mathbb{R}$ - reálná čísla

Vzorce

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + \dots + a_n$$

Kvadratická funkce

Obecný předpis: $y = ax^2 + bx + c$

- Řešení kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$

diskriminant: $D = b^2 - 4ac$

Je-li diskriminant nezáporný, pak $x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

Je-li $D < 0$, pak rovnice nemá řešení v $\mathbb{R}$.

- Grafem je parabola. Je-li $a > 0$, pak má orientaci $\cup$. Je-li $a < 0$, pak $\cap$.

Je-li $D < 0$, pak je parabola celá nad nebo celá pod osou x .

Doplnění na čtverec:

Kvadratický trojčlen lze pomocí vzorce $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ upravit do tvaru $(ax-b)^2 + c$.

První dva členy kvadratického trojčlenu dáme rovny $a^2 - 2ab$ a dopočteme a, b . Pak ke kvadratickému trojčlenu přičteme a odečteme b^2 . Nyní lze použít vzorec $(a-b)^2$.

Např.: $x^2 - 4x + 5$. Máme: $x^2 = a^2, -4x = -2ab$. Z toho plyne, že $a = x, b = 2$. Pak $b^2 = 4$ a lze udělat: $x^2 - 4x + 5 = x^2 - 4x + 4 - 4 + 5 = (x-2)^2 - 4 + 5 = (x-2)^2 + 1$

Logaritmické a exponenciální funkce

Přirozený logaritmus značíme jako $\log x$, může být značen též jako $\ln x$.

Poznámka: vždy se radši zeptejte, zda je $\log x$ přirozený či dekadický!

$$\forall a, x \in \mathbb{R}, a > 0: a^x > 0$$

$$\log_a x = y \iff a^y = x \text{ (definice logaritmu)}$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\log_a(r \cdot s) = \log_a r + \log_a s$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$\log_a\left(\frac{r}{s}\right) = \log_a r - \log_a s$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$\log_a(r^s) = s \cdot \log_a r$$

$\log x$ je definován pouze pro kladná čísla

Logaritmus i exponenciála jsou prosté funkce.

Logaritmus a exponenciála o základu < 1 klesají, a o základu > 1 rostou. (důležité u nerovnic)

Např.

$$3^x \leq 3^{2x-1} \implies x \leq 2x-1 \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{2x} < \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} \implies 2x > x-1$$

$$\log_5(x-1) \geq \log_5(x+2) \implies x-1 \geq x+2$$

$$\log_{\frac{1}{3}}(2x+7) > \log_{\frac{1}{3}}(-x-1) \implies 2x+7 < -x-1$$

Goniometrické funkce

Převádění mezi kvadranty: Necht' goniometrická funkce ($\sin, \cos, \tan, \cot$) nabývá v prvním kvadrantu v bodě x_1 nějaké hodnoty $a \in [0, 1]$. Pak platí, že v absolutní hodnotě nabývá hodnoty a i ve zbývajících třech kvadrantech, a to v bodech $x_2 = \pi - x_1$, $x_3 = \pi + x_1$ a $x_4 = 2\pi - x_1$.

$$1 = \sin^2(x) + \cos^2(x)$$

$$\cot(-x) = -\cot(x)$$

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$\cos(-x) = \cos(x)$$

$$\cot(x) = \frac{1}{\tan(x)}$$

$$\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

$$\sin(x - y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

$$\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

$$\cos(x - y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$$

$$\tan(-x) = -\tan(x)$$

Substituce

Užitečná např. při řešení jistých rovnic a nerovnic.

Spočívá v označení jistého výrazu písmenem. Pak celou rovnici vyjádříme tak, aby se tam vyskytovalo pouze naše nové písmeno. Získáme novou rovnici, kterou vyřešíme. Pak musíme ještě provést desubstituci, jak je vidno na příkladu uvedeném níže.

Řešme rovnici $(x + 1)^2 + 2x - 1 = 0$.

Provedme substituci $y = x + 1$. Pak $x = y - 1$.

Pomocí substituce, nahraďme v rovnici všechny výrazy s x za výrazy s y .

Dostaneme: $y^2 + 2(y - 1) - 1 = 0$.

Řešme rovnici: $y^2 + 2y - 3 = 0$.

Výsledek: $y = 1$ a $y = -3$.

U každého výsledku provedeme desubstituci (tj. za y napíšeme substituovaný výraz).

$y = 1 \Rightarrow x + 1 = 1$, tedy $x = 0$

$y = -3 \Rightarrow x + 1 = -3$, tedy $x = -4$.

Výsledek: $x \in \{-4, 0\}$.